Министерство образования Республики Беларусь

Могилевский государственный университет продовольствия

А.Н. Спасков

Теорема о максимальном числе взаимно валентных точек в дискретном пространстве с минимальной длиной l_0

(Спасков, А. Н. Теорема о максимальном числе взаимно валентных точек в дискретном пространстве с минимальной длиной lo / Могилев, 2007. 14 с. Деп в ГУ "БелИСА" 21.06. 07 . - Д200725).

Могилев 2007

Определим первоначальные понятия, а именно: понятия *континуума* и *точки*. *Континуум* определяется как абсолютно тождественный сам себе объект. Не имеет смысла говорить о положении в континууме. Речь может идти только о внеположении или об отрицании континуума. Это отрицание континуума можно трактовать как «дырку» или сингулярность в континууме.

Назовем сингулярность в континууме *точкой* и определим *топологическое пространство*, как совокупность сингулярностей или, другими словами, как множество точек, определенных в континууме.

Полагаем, что точка может образовывать (индуцировать) другую, отличную от нее точку. Индуцирующую точку назовем *образующей* точкой. Индуцированную точку назовем *образованной* точкой.

Полагаем, что образование точки одновременно определяет *образованный промежуток*, как промежуток между образующей и образованной точками. Считаем, что *мерой* образованного промежутка является длина l_0. Будем считать, что все образованные промежутки имеют одинаковую протяженность l_0, а это означает, что различные точки определены по отношению друг к другу на расстоянии не меньшем, чем l_0 и промежуток l_0 будет минимальной определенной длиной в данном пространстве. Таким образом, образованный промежуток задает единицу длины и определяет *операцию измерения* промежутка. Полагаем, что промежуток можно *измерить,* если его можно образовать.

Назовем *валентной* по отношению к данной точке точку, которую можно образовать из данной точки.

Следствие 1: *Любая образованная точка может быть валентной.*

Назовем *валентным промежутком* промежуток, который можно образовать.

Следствие 2: *Любой образованный промежуток может быть валентным.*

Следствие 3: *Протяженность валентного промежутка равна протяженности образованного промежутка.*

Таким образом, определяем 3 *отношения* точки к другой точке (образующая, образованная, валентная) и 2 промежутка (образованный и валентный).

Следствие 4: *Для образующей точки другие точки могут находиться в 2-х определенных отношениях: образующая и валентная.*

Разовьем первоначальные понятия. Определим *базисное пространство* как индексированное пространство $\boldsymbol{A_N}$, областью значений которого является множество *[1,n]****,*** *где* $n \in N$ *(множество натуральных чисел).*

Полагаем, что в любой точке пространства можно определить другое, отличное от него пространство. В этом случае данную точку назовем *базой* а определяемую – *покрытием.*

Считаем, что *положение* точки в базовом пространстве определяется базой, которую она покрывает.

Обозначим понятие того, что точка a_m находится в точке a_n базисного пространства символом a_n^m.

Определим *вложение* пространства A^M в пространство A_N как множество точек a^m, которые находятся в положении a_n, причем отображение $a_m \rightarrow a_n$ взаимнооднозначное. Назовем a_n^m - *n-й координатой* A^M в A_N.

Пространство с определенными промежутками между всеми точками назовем *связанным пространством.*

Назовем вложение связанного пространства A^M в A_N *вектором* A_N^M. Назовем вложенное пространство накрывающим пространством или *покрытием* вектора.

Базисное пространство вектора назовем *собственным пространством* вектора, или *базисом* вектора. Базисное пространство вектора считаем также связанным пространством. Считаем, что различным вложениям покрытия вектора в базис, соответствуют различные *расположения* вектора в собственном базисе. Вложенная точка a_n^m представляет собой вектор 1-го порядка. В дальнейшем, если это особо не оговаривается, будем называть вектор первого порядка точкой. Назовем вектор, одна из точек которой называется образующей, *образующим вектором*. Точку вектора, которая не является образующей, назовем *внутренней* точкой. Считаем, что любое множество внутренних точек определяет внутренний вектор.

Следствие 4': *Для внутренней точки любая другая точка может находиться в одном определенном отношении: валентная.*

Назовем *валентной* по отношению к покрытию (базе) вектора точкой точку, которую можно образовать из данного вектора и которая находится в определенных отношениях со всеми точками покрытия (базы) данного вектора.

Считаем точки, валентные к базе или к покрытию, точками, валентными к вектору.

Следствие 5: *Точка, валентная для образующего вектора будет валентной для образующей точки.*

Аксиома 1: *Для любого вектора существуют валентные точки.*

Эта аксиома является, по смыслу, выражением идеи о возможности неограниченного расширения определяемого таким образом пространства. Пространство в этом случае будет потенциально бесконечным и строится по индукции, аналогично индукции числового ряда натуральных чисел.

В дальнейшем построении применим следующий метод. Будем последовательно расширять пространство и для каждого шага, если в этом есть необходимость, будем развивать первоначальные и вводить новые понятия. По существу, это будет *генетическим методом* развития теории.

Следствие 6: *Любой вектор может быть образующим.*

Следствие 7*: Любая валентная к образующему вектору точка единственна.*

Это утверждение непосредственно следует из определения точки, валентной к вектору, т.к. смысл этого определения заключается в том, что любой совокупности определенных отношений со всеми точками вектора однозначно соответствует определенная валентная точка. Не имеет смысла говорить о двух и более различных валентных точках, которые находятся в одинаковых отношениях со всеми точками вектора, т.к. нет критерия их различия.

Произведем индукцию пространства. Исходя из аналогии с индукцией натурального ряда чисел, роль единицы здесь будет играть точка, а роль прибавления единицы будет играть образование точки.

Образование начальной точки будет выглядеть по нашей схеме как возникновение сингулярности в континууме, а расширение пространства – как заполнение валентностей (вложение образованных точек в валентные).

Пусть существует точка a_1^1.

Из аксиомы 1 заключаем, что эта точка может быть образующей (следствие 4), и для нее существует, по крайней мере, одна валентная точка, и она будет единственной (следствие5).

Пусть точка a_1^1 образует другую точку, и эта точка заполняет валентную к точке a_1^1 точку. По нашей схеме точка a^1 образует точку a^2, которая покрывает базу a_2, валентную к базе a_1. В итоге образуется точка a_2^2. Точки a_1^1 и a_2^2 определяют вектор a_{12}^{12}.

Из определения вектора следует, что для любой точки a^m покрытия вектора возможны N положений в базисе вектора, где N – порядок вектора.

Назовем покрытие, индекс которого совпадает с индексом базы, *тождественным покрытием.*

Базу тождественного покрытия назовем собственной базой.

Следствие 8: *База, валентная к собственной базе, будет валентной к тождественному покрытию.*

Вложение вектора, при котором все его точки покрывают собственные базы, назовем *тождественным вложением.*

Назовем вложение, при котором порядок индексации покрытия совпадает с порядком индексации базиса, прямым (или *правым*) вложением. Вложение, при котором порядки индексации покрытия и базиса противоположны, назовем обратным (или *левым*) вложением. Ясно, что тождественное вложение будет правым.

Считаем, что возможны различные *состояния* вектора, в зависимости от того, какая из его точек будет образующей. Следовательно, количество состояний вектора равно количеству точек этого вектора, которые могут быть образующими. Обозначим понятие того, что точка a_n^m является образующей символом $a_{(n)}^{(m)}$. Таким образом, для вектора a_{12}^{12} возможны два вложения: a_{12}^{12}; a_{12}^{12} и 4 состояния: $a_{(1)2}^{(1)2}$; $a_{1(2)}^{1(2)}$; $a_{(1)2}^{(2)1}$; $a_{1(2)}^{2(1)}$.

Пусть вектор a_{12}^{12} будет образующим. Из аксиомы 1 следует, что этот вектор имеет, по крайней мере, одну валентную точку.

Лемма 1: *Для любого расположения 2-вектора* a_{kn}^{ml} *существует единственная валентная точка.*

Доказательство: Пусть точка a_k^m будет образующей. Из следствия 5 заключаем, что точка, валентная к $a_{(k)n}^{(m)l}$, будет валентной к точке $a_{(k)}^{(m)}$. Из определения валентной точки следует, что точка, образованная из a_k^m будет в определенном отношении с точкой a_n^l. Так как точка a_n^l - внутренняя, то из следствия 4′ заключаем, что образованная из $a_{(k)}^{(m)}$ точка будет валентной для a_n^l. Из следствия 1 заключаем, что образованная из a_k^m точка может быть валентной для a_k^m. Так как она валентна для a_n^l, она может быть образована из a_n^l и, следовательно, она может быть валентной для вектора $a_{(k)n}^{(m)l}$ с образующей точкой a_n^l. Таким образом, валентные точки для двух возможных состояний вектора a_{kn}^{ml} совпадают. Исходя из этого и из следствия 7, заключаем, что валентная для 2-вектора a_{kn}^{ml} точка единственна.

Таким образом, в нашем случае вектор $a_{1(2)}^{1(2)}$ образует точку a_3^3, а вектор a_{12}^{12} и точка a_3^3 определяют вектор a_{123}^{123}. Пусть вектор a_{123}^{123} будет образующим.

Лемма 2: *Для любого вложения образующего 3-вектора* a_{kn}^{ml} *существует одна валентная точка.*

Доказательство: Рассмотрим образующий вектор $a_{12(3)}^{ml(k)}$. Пусть образованная точка заполняет валентную для вектора точку. Из следствия 4 заключаем, что образованная из a_3^k точка будет валентной к точкам a_1^m и

a_2^l. Так как образованная точка может быть валентной, а валентная образованной (следствие 4), то точка, образованная из a_3^k может быть образована из точек a_1^m и a_2^l. Исходя из этого и из следствия 7, заключаем, что образованная точка будет единственной для вектора a_{123}^{mlk} (т. к. она единственна для каждого состояния и совпадает для всех 3-х состояний).

Исходя из определения валентной точки считаем, что *положение точки*, валентной к базе или покрытию, по отношению к этому базису или покрытию определяется совокупностью определенных отношений этой точки со всеми точками базы или покрытия. И, наоборот, *положение базиса или покрытия* по отношению к валентной точке базиса или покрытия, соответственно, определяется совокупностью определенных отношений всех точек базиса или покрытия с валентной точкой.

Из этого определения и из следствия 7 заключаем, что каждой валентной точке однозначно соответствует определенное положение.

Считаем далее, что положение покрытия в базисе определяется вложением этого покрытия в базис. Таким образом, каждому вложению вектора однозначно соответствует положение покрытия этого вектора в базисе. Аналогично можно определить положение базиса в покрытии.

Из определения положения точки и покрытия (базиса) относительно базиса (покрытия) заключаем:

Следствие 9: *Положение покрытия (базиса) по отношению к валентной точке базиса (покрытия) определяется совокупностью положений всех точек этого покрытия (базиса).*

Из определения вложения следует, что при изменении вложения меняется положение в базисе хотя бы одной точки покрытия, так же, как и положение в покрытии хотя бы одной точки базиса. Исходя из этого, и из следствия 9 заключаем:

Следствие 10: *При изменении вложения меняется положение покрытия по отношению к валентной точке базы и положение базы по отношению к валентной точке покрытия.*

Следствие 10': *При изменении вложения меняется положение валентной точки покрытия относительно валентной точки базиса.*

Лемма 3: *Для любого 3-вектора существуют 2 валентные точки.*

Доказательство: Рассмотрим образующий вектор $a_{12(3)}^{ml(k)}$. Пусть образованная точка заполняет валентную к базе точку. Так как образующая точка занимает фиксированное положение a_3^k, а для внутреннего вектора существуют два вложения в собственное пространство (a_{12}^{ml} и a_{12}^{lm}), то (следствие 10) возможны 2 расположения покрытия 3-вектора по отношению к образованной точке (которая вложена в валентную точку базы). Это утверждение эквивалентно обратному, а именно: возможны 2 положения образованной точки относительно покрытия. Аналогично, если образованная точка заполняет валентную к покрытию точку, можно утверждать, что возможны 2 положения образованной точки относительно базы.

Из следствия 8 и 10 заключаем, что возможны 2 валентные точки. Так как при правом вложении валентные точки базы и покрытия совпадают, а при левом вложении положение валентной точки покрытия изменяется по отношению к валентной точки базы, то можно определить валентные точки покрытия для правого и левого вложения. Они будут одинаково определены ко всем точкам покрытия, но по-разному к точкам базы.

Рассмотрим вектор $a_{12(3)}^{12(3)}$. Для него возможны два вложения внутреннего вектора: правое вложение a_{12}^{12} и левое вложение a_{12}^{21}. Таким образом, для каждого вложения может образоваться своя, единственно определенная точка (лемма 2).

Считаем, что вектор $a_{12(3)}^{12(3)}$ образует точку a_4^4, а вектор $a_{12(3)}^{21(3)}$ - точку $a_{4'}^{4'}$. Следовательно, можно определить 2 новых вектора: a_{1234}^{1234} и $a_{1234'}^{1234'}$.

Назовем образованную из покрытия точку *правой* к покрытию. Назовем точку, образованную при правом вложении *правой* к базису, а точку, образованную при левом вложении – *левой* к базису. Назовем правую и левую к базису точки *противоположными*. Понятие противоположных имеет следующий смысл.

При изменении правого вложения на обратное мы получаем левое вложение и соответствующую ему левую точку, а при изменении левого вложения на обратное мы получим правое вложение и соответствующую ему правую точку.

Таким образом $a_{4'}^{4'} = \overline{a_4^4}$, а $\overline{a_{4'}^{4'}} = \overline{\overline{a_4^4}} = a_4^4$. Здесь использовано тождество $\overline{\overline{a}} = a$, где $\overline{a}$ - означает точку, противоположную a.

Лемма 4: *Образующий 4-вектор имеет 4 валентные точки.*

Доказательство: Докажем вначале, что для любой точки 4-вектора существует противоположная точка, валентная к вектору.

Так как все промежутки 4-вектора либо образованы, либо валентны, то (следствие 3) их протяженность равна l_0. Следовательно, любая точка 4-вектора может быть валентной к трем другим.

Из леммы 3 следует, что каждой из этих точек соответствует вторая, валентная к этим трем точкам и противоположная данной точка. Докажем далее, что противоположные 2-х любых валентных точек отличаются.

Предположим противное, а именно: противоположные 2-х различных точек совпадают:

$$\bar{a}_\eta = \bar{a}_\mu, \text{ где } a_\eta \neq a_\mu.$$

Так как по определению противоположных $\bar{\bar{a}}_\eta = a_\eta$ и $\bar{\bar{a}}_\mu = a_\mu$, то, следовательно, $a_\eta = a_\mu$, что противоречит условию. Следовательно, $\bar{a}_\eta \neq \bar{a}_\mu$ для $\forall \eta \neq \mu$. Исходя из этих двух утверждений, убеждаемся в истинности леммы 4.

Назовем пространство A_N *упорядоченным,* если существует такое отображение α, которое любую точку a_n (n<N) отображает в a_{n+1} и существует обратное отображение α^{-1}, которое любую точку a_n (n>1) отображает в a_{n-1}:

$$\alpha\colon a_n \to a_{n+1},$$

$$\alpha^{-1}\colon a_n \to a_{n-1}.$$

В нашем случае базовое пространство A_N будет упорядоченным изначально, т. к. оно строится по индукции и порядок индукции ее элементов совпадает с порядком индукции ряда натуральных чисел. Отображению α соответствует, в данном случае, отображение образующей точки в образуемую, а α^{-1} – обратное отображение.

Назовем отображение $a_n^m \to a_k^m$ для $\forall a_n, a_k \in A_N$ - *перемещением* точки в базовом пространстве.

Отображение $a_n^m \to a_{n+1}^m$ назовем *правым сдвигом*, а отображение $a_n^m \to a_{n-1}^m$ - *левым сдвигом.*

Если сдвиг α отображает a_N в a_1, а сдвиг α^{-1} отображает a_1 в a_N, то такое базовое пространство назовем *замкнутым* по сдвигу α. Вектор, собственная база которого замкнута, назовем *замкнутым вектором.* Если все точки замкнутого вектора A_N^M испытывают сдвиг, то такое перемещение назовем *циклическим.* В наших обозначениях перемещению точки будет соответствовать перестановка верхних индексов.

Считаем, что подмножество вложений замкнутого вектора в собственное пространство, связанных друг с другом циклическими перестановками, определяет ориентацию вектора в собственном пространстве, или собственную ориентацию вектора.

Следствие 11: *Ориентация вектора меняется при любой нециклической перестановке точек его покрытия.*

Можно заключить, что совокупность подмножеств вложений накрывающего пространства замкнутого вектора в собственное пространство, не сводимых друг к другу циклическими перестановками, образует множество ориентаций вектора.

Лемма 5: *Любая образующая точка ориентированного 4-вектора имеет 3 валентные точки.*

Рассмотрим вектор $a_{\mu\nu k(l)}^{\mu\nu k(l)}$ с правой ориентацией.

Из леммы 4 следует, что любая точка, не равная a_l^l, имеет противоположную, валентную к a_l^l точку.

Пусть точка a_l^l образует точку $a_{\bar{k}}^{\bar{k}}$, где $a_{\bar{k}}^{\bar{k}} = \bar{a}_k^k$. Таким образом, из данного вектора образуется 5-вектор $a_{\mu\nu kl\bar{k}}^{\mu\nu kl\bar{k}}$. Образование этой точки возможно при трех расположениях накрывающего вектора, сохраняющего ориентацию:

$$a_{\mu\nu kl}^{\mu\nu kl};\ a_{\mu\nu kl}^{\nu k\mu l};\ a_{\mu\nu kl}^{k\mu\nu l}.$$

Из следствия 10 заключаем, что каждому вложению соответствует определенная валентная точка. Так как таких вложений возможно 3, то и точек, валентных к образующей будет 3. (Лемма доказана).

Следствие 12: *Любая валентная точка для образующей точки 4-вектора будет противоположной для внутренней точки этого вектора.*

Лемма 6: *Точка, противоположная для образующей точки не может быть валентной для нее.*

Из леммы 4 следует, что образующий 4-вектор имеет 3 противоположные точки для внутренних точек т 1 противоположную точку для образующей точки.

Из следствия 12 заключаем, что образующая точка может образовать только точку, противоположную для внутренней точки 4-вектора. Следовательно, образующая точка не может образовать противоположную себе точку, и лемма 6 доказана.

Из следствия 6 заключаем, что любая точка 4-вектора может быть образующей. Следовательно, любая противоположная точка может быть противоположна образующей. Исходя из этого и из леммы 6, заключаем:

Следствие 13: *Любые валентные точки не могут быть взаимно валентными друг к другу.*

Теорема 1: *Максимальное число точек, взаимно валентных по отношению друг к другу равно 4-м.*

Доказательство: Из следствия 12 заключаем, что любая образующая точка 4-вектора может образовать только точку, противоположную для внутренней точки и, следовательно, любая образованная точка будет противоположной для какой-либо точки 4-вектора.

Так как, согласно следствию 13, противоположные точки не могут быть валентными, то любая образованная точка не будет валентна по отношению хотя бы к одной точке 4-вектора и теорема доказана.